

## Das Spiel „Dodge Ball“ und die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In ihrem Buch „Coincidences, Chaos, and all That Math Jazz – Making Light of Weighty Ideas“ (Verlag W. W. Norton & Co) stellen die beiden Autoren *Edward B. Burger* und *Michael Starbird* das folgende Spiel zwischen zwei Personen „Dodge Ball“ vor:

Spieler 1 hat einen Zettel mit sechs untereinanderstehenden Reihen zu je sechs Kästchen.

### Spieler 1

1						
2						
3						
4						
5						
6						

Spieler 2 hat nur eine Reihe von Kästchen, nummeriert von eins bis sechs:

### Spieler 2

1	2	3	4	5	6

Spieler 1 beginnt und füllt die erste Reihe Kästchen (horizontal) nach Belieben mit X- oder O-Symbolen, z. B. XOXXXO. Dann kommt Spieler 2 an die Reihe. Er malt entweder ein X oder ein O in sein erstes Kästchen. Dann ist wieder Spieler 1 dran und so weiter. Spieler 1 gewinnt, wenn eine seiner sechs Reihen am Ende die selbe Sequenz wie die Reihe von Spieler 2 hat. Kann Spieler 2 allen sechs Kombinationen von Spieler 1 „ausweichen“, hat er gewonnen.

Ein simples Spiel, für das Spieler 2 eine simple Gewinntaktik hat: Er trägt in sein erstes Kästchen jenes Symbol ein, das *nicht* im ersten Kästchen der ersten Reihe von Spieler 1 steht. In sein zweites Kästchen trägt er jenes Symbol ein, das *nicht* im zweiten Kästchen der zweiten Reihe von Spieler 1 steht und so weiter. Auf diese Weise verhindert er eine Übereinstimmung seiner Reihe mit jeder Reihe von Spieler 1.

Was aber, sagen dann die Autoren, wenn es unendlich viele unendlich lange Reihen gibt? Gewinnt dann – in dieser freilich äußerst fiktiven Situation – Spieler 2 immer noch? Gewiss doch, er kann ja unendlich lang die oben genannte Taktik anwenden. Aber, und jetzt wird es spannend: Was ist, wenn Spieler 1 die Unendlichkeit ausnützt und einfach *alle* möglichen unendlich vielen Symbolkombinationen hinschreibt? Dann bleibt ja dem Spieler 2 keine weitere mehr übrig; seine Reihe muss doch dann einer der von Spieler 1 aufgeschriebenen gleichen? Eben nicht, sagen Burger und Starbird. Selbst dann kann Spieler 2 mit seiner Taktik noch eine dazufügen. Denn, um es kurz zu machen: Die Menge aller unendlich vielen Kombinationen ist größer (gemeint ist, von größerer Mächtigkeit) als die Menge aller unendlich vielen Reihen von Spieler 1.

### Es lässt sich leicht zeigen, dass diese letzte Argumentation nicht haltbar ist:

Eine scheinbar triviale tatsächlich aber essentielle Voraussetzung für dieses Spiel liegt nämlich darin, dass die beiden Spieler *alle* auftretenden Symbolkombinationen *lesen* können. Jeder Spieler muss – um, wie vorgesehen, die Symbole vergleichen zu können – einen Überblick über *alle* bis zu seiner jeweiligen Entscheidung *aufgeschriebenen* Symbole haben. Kein Problem bei allen *endlichen* Spielen, also solchen mit einer endlichen Anzahl von Kästchen bzw. Reihen. Anders liegen die Dinge aber

„wenn es unendlich viele unendlich lange Reihen gibt“. Dann kann nämlich eine Reihe gar nicht vollständig *angeschrieben* werden. Der Spieler 1 kann zwar beliebig viele Symbole in jeder Reihe eintragen aber eben *nur endlich viele*. Wie kann es da überhaupt zu unendlich langen Reihen kommen? Offenbar nur dadurch, dass Spieler 1 ein *Bildungsgesetz* für die Konstruktion der betreffenden Reihe angibt. Etwa in der Art: „XXOXOOXXO...“ mit dem Hinweis, dass „alle weiteren Stellen gleich O“ sind. Ein anderes derartiges Bildungsgesetz wäre etwa: An der  $n^{\text{ten}}$  Stelle der Reihe steht X, wenn die  $n^{\text{te}}$  Dezimalstelle der Zahl  $\pi$  gerade ist, sonst O. Diese Reihe wäre eindeutig definiert, kann aber nie vollständig *angeschrieben* werden. Sie gestattet aber dem Spieler 2 in seiner Reihe jede Stelle unter Berücksichtigung der entsprechenden Stelle der Reihe von Spieler 1 festzusetzen.

Ein Spiel mit unendlich langen Reihen ist daher nur möglich, wenn Spieler 1 für jede von ihm angegebene Reihe ein *endliches Bildungsgesetz* angibt. Endliche Bildungsgesetze können aber offensichtlich entsprechend ihrer Formulierung *abzählbar angeordnet* werden. Die Menge aller Reihen, die von Spieler 1 angegeben werden können, ist somit *abzählbar*. Es kann also sehr wohl *unendlich viele unendlich lange Reihen* geben; jedoch nur, wenn diese Reihen *jeweils vollständig beschrieben* werden können, erfüllen sie die Voraussetzungen des Spieles. Es sind daher alle Mengen solcher Reihen abzählbar. Die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen wird nicht überschritten.